



التمرين الأول : (4,5 ن)

(I) ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. لكل زوج (a, b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

① ① تحقق أن لكل زوج (a, b) من $\mathbb{E}^2$: $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$ 0,25 ن

② ② استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E . 0,25 ن

③ ② بين أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية. 0,50 ن

(II) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $a \in E$: $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix}$

① ① نضع : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A^2 = -2A$ و أن : $M(a) = 1 + \frac{a}{\sqrt{2}}A$ 0,50 ن

② ② بين أن F جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,50 ن

$\varphi : (E, \perp) \longrightarrow (F, \times)$

$a \longrightarrow \varphi(a) = M(a)$

② نعتبر التطبيق :

① ① بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي. 0,50 ن

② ② استنتج بنية $(F, \times)$. 0,50 ن

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

(I) ① ① تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$: (E) 0,25 ن

② ② حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) . 0,25 ن

③ ② نفترض أن $|a| = 1$.

① ① بين أن : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$ 0,25 ن

② ② تحقق أن : $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$ 0,25 ن

③ ③ استنتج أن : $\arg(u) = \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}[\pi]$ 0,50 ن

④ ③ بين أن $|u| + |v| \geq 2$ 0,50 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 . و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث :

$$|u| + |v| = m$$

① بين أن (E_m) إهليلج مركزه أصل المعلم O .

ن 0,50

② نضع : $a = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان .

① بين أن : $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m) .

ن 0,25

② أنشئ الإهليلج (E_4) .

ن 0,25

③ نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رأسَي الإهليلج (E_4) . بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

ن 0,50

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر المعادلة : $195x - 232y = 1$: (E) .

① ① حدد $195 \wedge 132$.

ن 0,50

② بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

ن 0,50

③ أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$.

ن 0,25

② بين أن العدد 233 عدد أولي .

ن 0,25

③ لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 . نعتبر التطبيق f من A نحو A المعروف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{195} على 233 .

قبل أن : $\forall a \in A \setminus \{0\} : a^{232} \equiv 1[233]$.

قبل أن : $\forall a \in A \setminus \{0\} : a^{232} \equiv 1[233]$.

① بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن : $a = b$.

ن 0,50

② ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$. حدد a بدلالة b .

ن 0,50

③ استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

ن 0,50

التمرين الرابع : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$.

(I) ① بين أن لكل x من $\mathbb{R} : g(x) \geq 0$.

ن 0,50

② بين أن $x = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $g(x) = 0$.

ن 0,25

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x + 1} ; & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$.

ن 0,50

② بين أن الدالة f متصلة في 0 .

ن 0,25

③ ① أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

ن 0,50

② استنتج تغيرات الدالة f .

ن 0,25

④ نعتبر التكامل : $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$ حيث x عدد حقيقي .

① باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$.

ن 0,50

② بين أن لكل x من $\mathbb{R} : \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$.

ن 1,00

0,50 ن ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

0,75 ن د) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

0,50 ن 5 ا) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)}(e^x(x - 1) + 2 + x)$

0,50 ن ب) أدرس إشارة $e^x(x - 2) + 2 + x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

0,25 ن ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$.

0,50 ن د) أنشئ (ع)

(III) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,25 ن 1 بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

0,50 ن 2 ا) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0,50 ن ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

0,50 ن ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

(IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

0,50 ن 1 ا) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

0,25 ن ب) بين أن الدالة F متصلة في 0.

0,50 ن ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$.

0,50 ن 2 ا) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

0,25 ن ب) أدرس تغيرات الدالة F .