المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
و التعليم العالي
و تكوين الأطر
و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الإستدراكية 2010
الموضوع

الصفحة
1 / 3

المادة:	الرياضيات	RS22	المعامل:	7
الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها		مدة الإنجاز:	3

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان : 3 ساعات ؛
- عدد الصفحات : 3 صفحات (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان تمارين الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان في الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للتمرين الخامس ، ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

Moutamadris.ma

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$ و (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0.5 **1)** بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(1,2,3)$ و شعاعها 5 .

1 **2)** أ – بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$ واستنتج أن $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0.5 ب – احسب $d(\Omega,(ABC))$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC).

0.5 أ – بين أن : $\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3+3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

0.25 ب – بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (ABC) هو $(1,-2,0)$.

0.25 ج – تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) والفلكة (S) .

التمرين الثاني (3 ن)

1 **1)** حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{4\pi}{3}$.

0.5 أ – بين أن $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

0.25 ب – تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R .

0.75 ج – بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي .

0.5 د – استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد : 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3 (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

1.25 **1)** ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " .

و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .

بين أن $P(A)=\frac{3}{28}$ وأن $P(B)=\frac{13}{28}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

0.25 أ – حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

0.75 ب – بين أن : $P(X=1)=\frac{15}{28}$.

0.75 ج – أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n}{21+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

Moutamadris.ma

0.5 **1)** بين أن : $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

0.75 **2)** بين أن : $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

0.5 **3)** بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأنها متقاربة .

0.75 **4)** أ- بين بالترجع أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

0.5 ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الخامس (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

0.25 **1)** أ- تحقق من أن $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 ب – بين أن : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.25 **2)** أ – تحقق من أن $\frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

0.5 ب – استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$.

0.5 **3)** أ – بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1[$ وأنها تزايدية على $[1,+\infty[$.

0.5 ب - استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)>0$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$) .

1 **1)** بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$.

0.5 **2)** أ - بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

0.75 ب - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ ثم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$) .

0.5 ج - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

0.5 **3)** بين أن $y = 3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$.

0.75 **4)** أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

1 **5)** أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن: $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ و $v(x) = \ln x$) .

0.5 ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.

Moutamadris.ma

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول :

1

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-11=14$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $R=5$.

2 أ

لدينا : $A(0;-2;0)$ و $B(1;1;-4)$ و $C(0;1;-4)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$.

و منه :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=0\vec{\imath}-(-4)\vec{\jmath}+3\vec{k}$$
$$=4\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان.

يعني أن : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=0$

يعني : $0x+4(y+2)+3z=0$ يعني : $4y+3z+8=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و (ABC) : $4y+3z+8=0$

إذن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|0+8+9+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\sqrt{25}=5$

نلاحظ أن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$

يعني : $(\Delta):\begin{cases}x-1=0t\\y-2=4t\\z-3=3t\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=4t+2\\z=3t+3\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC):4y+3z+8=0\\(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3t+3\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\end{cases}$

نعلم أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم كذلك أن : $\boxed{(\Delta)\perp(ABC)}$ (2) و $\boxed{\Omega\epsilon(\Delta)}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H)=(\Delta)$ يعني : $H\epsilon(\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H ننطلق من النظمة التالية : $\begin{cases}H\epsilon(\Delta)\\H\epsilon(ABC)\end{cases}$

و هذه النظمة تُكافئ : $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4t+2\\\gamma=3t+3\\4\beta+3\gamma+8=0\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t+2)+3(3t+3)+8=0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t=-1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4(-1)+2=-2\\\gamma=3(-1)+3=0\end{cases}$$

و بالتالي : $H(1;-2;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

للتحقق من أن $H(1;-2;0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$ يكفي أن نتحقق من أن مثلوث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتي المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $\begin{cases}(\mathcal{S}):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\(ABC):4y+3z+8=0\end{cases}$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتي (ABC) و $(\mathcal{S})$ و نرى هل تتحقق المتساويات .

لدينا : $1^2+(-2)^2+0^2-2\times1-4(-2)-6\times0-11=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (\mathcal{S})$

و لدينا كذلك : $4(-2)+3(0)+8=-8+8=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) .

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$

لدينا : $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64=(8i)^2$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i\quad\text{و}\quad z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$$

Moutamadris.ma

2 أ

$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases}$$ لدينا :

و لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{4\pi}{3}\right) : \begin{matrix} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{matrix}$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0)$

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M) = M'$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

2 ب

لدينا : $aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2 ج

لدينا : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)}$

$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$

$= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$

$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$

إذن : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2 د

حصلنا على : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases} \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

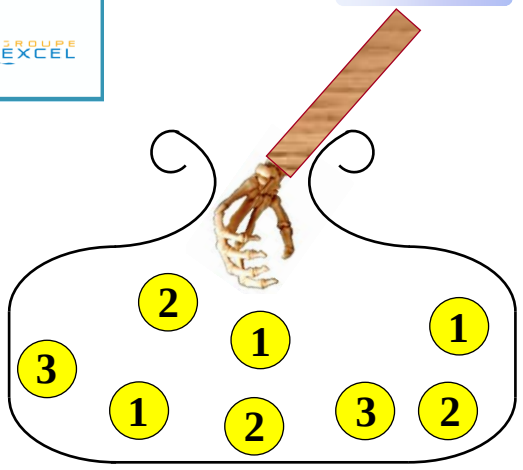
أو بتعبير آخر : $\begin{cases} BA = BC \\ A\hat{B}C = 60° \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

و قياس الزاوية $\hat{B}$ هو $60°$.

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

الحالة الأولى : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3 بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

الحالة الثانية : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3 بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2 أ

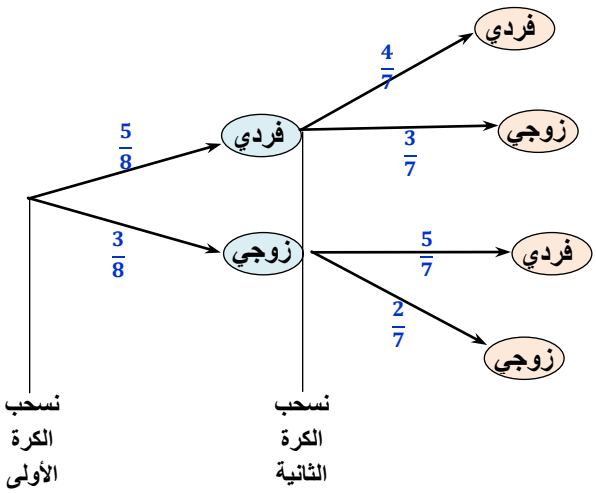
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا . و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

Moutamadris.ma

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2
أو بتعبير أجمل : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2 ب

$p[X=1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X=1]=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

P_X : $\{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

لدينا حسب السؤال 1) : $p(A)=\frac{3}{28}$ إذن : $p[X=0]=\frac{3}{28}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}p[X=2]&=1-p[X=0]-p[X=1]\\&=1-\frac{3}{28}-\frac{15}{28}=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

P_X : $\{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

$$\begin{aligned}0&\longmapsto p[X=0]=\frac{3}{28}\\1&\longmapsto p[X=1]=\frac{15}{28}\\2&\longmapsto p[X=2]=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

التمرين الرابع :

1

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$: (P_n)

لدينا : $u_0=1>0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و u_n+21 موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية $\frac{3u_n}{u_n+21}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{3u_n}{21+u_n}>0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n>0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعَرَّف .(المقام يجب أن يخالف الصفر)

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3u_n}{21+u_n}\times\frac{1}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

نعلم أن : $u_n>0$ إذن $21+u_n>21$

يعني : $\frac{1}{21+u_n}<\frac{1}{21}$ يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{3}{21}$

يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{1}{7}$ يعني : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{7}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7}<1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا u_n نحصل على :

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{7}u_n<u_n}$ (1)

و نعلم كذلك حسب السؤال 2) أن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n>0$) فإنها متقاربة .

4 أ

من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1\leq\left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n\leq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

4 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

Moutamadris.ma

فإن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n \le \underbrace{\left(\frac{1}{7}\right)^n}_{n\infty}$

0 $\quad$ 0

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3-x-2\ln x+3$ إذن :

$$g'(x) = 3x^2-1-\frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

I 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. يعني : $x>0$

إذن : $3x^2+3x+2>0$ و $x>0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا .

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبلُ أن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x\le 1$

يعني : $(x-1)\le 0$ و منه : $g'(x)\le 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x\ge 1$

و منه : $(x-1)\ge 0$ يعني : $g'(x)\ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

I 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x\epsilon\,]0,1]$ يعني : $x\le 1$

إذن : $g(x)\ge g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0;1]$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : (1) $\boxed{\forall x\epsilon\,]0;1]\ ;\ g(x)>0}$

الحالة الثانية : $x\epsilon\,[1;+\infty[$ يعني : $x\ge 1$

إذن : $g(x)\ge g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1;+\infty[$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : (2) $\boxed{\forall x\epsilon\,[1;+\infty[\ ;\ g(x)>0}$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$.

II 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

إذن :

$$f'(x) = 1+\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-2x(x-1+\ln x)}{x^4} = 1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4} = 1+\frac{-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}$$

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال I 3) ب) : $(\forall x>0)\ ;\ g(x)>0$

و لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ x^3>0$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{g(x)}{x^3}>0$

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)>0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 2 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-1+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

0^+ $\quad$ 0^+ $\quad$ 0^+

$+\infty$ $\quad$ $+\infty$ $\quad$ $-\infty$

$$= 0-1+(+\infty)(1-\infty-\infty) = -1+(+\infty)(+\infty) = -1-\infty = -\infty$$

و بالتالي : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين

II 2 ب

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0(1-0+0) = 0$$

Moutamadris.ma

5 II أ

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_{v} dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv\,dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$$

5 II ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نقيس المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x+1)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right| dx$$

و لدينا : $x \in [1,e]$ إذن : $\boxed{x > 1}$ (1) و منه : $\boxed{\ln x > 0}$ (2)

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد : $x + \ln x > 1$

يعني : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ x - 1 + \ln x > 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} > 0$

أي : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \left|\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right| = \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة $\mathcal{A}$ نجد :

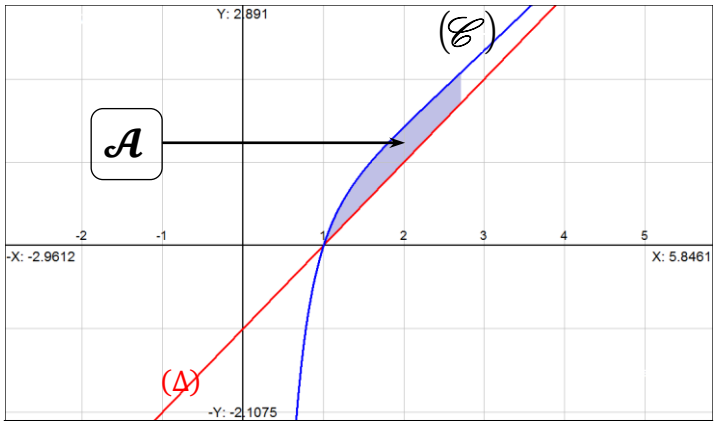
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left|\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right| dx = \int_1^e \left(\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{e} + 1\right) + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right)\ unité^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e}\right)(1\ cm)^2 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\ cm^2$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

إذن : (1) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2 II ج

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x - 1 + \ln x}{x^3}\right)$$

$$= 1 - 0 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 1 + 0(1 - 0 + 0) = 1$$

إذن : (2) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1}$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)$$

$$= -1 + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x - 1 + \ln x}{x^2}\right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

إذن : (3) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -1}$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

3 II

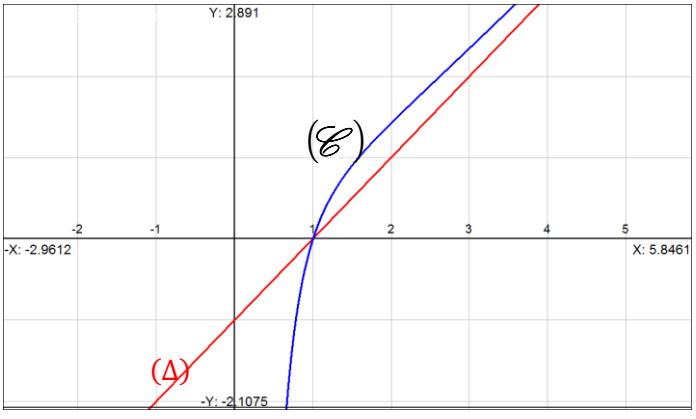
معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$

تكتب على الشكل : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = 3$

إذن : $(T) : y = 3(x-1)$

4 II



Moutamadris.ma